

特殊相対論における2台の宇宙船のパラドックス

松田卓也 木下篤哉

特殊相対論におけるパラドックスについては幾度となく議論されてきた。2台の宇宙船がある慣性系 S 上で同一線上に同じ方向を向いて接して置かれており、同じ期間同じ加速度を続け、同時に加速を終了して同じ速度 u に達する。その速度は光速度と比べ小さくはないものとする。加速終了後、 S 系から見た2台の宇宙船の間隔はどうなっているであろうか？ ローレンツ変換によって示されるように収縮するのか、あるいは元のままなのか？

答えは明白である。元のままだ。面白いことに、宇宙船系から見ると間隔は一定ではなく伸張する。2台の宇宙船の間隔は、一台の宇宙船の長さと同等に考えてはいけない。

筆者達は、相対論を教えている大学教授を含む多くの物理学者が、この明白に分かる設問を理解していないという興味深い事実を発見した。我々はミンコフスキー時空図を使って問題を解き、その落とし穴を明らかにしていく。

A Paradox of Two Space Ships in Special Relativity

Takuya Matsuda and Atsuya Kinoshita

A paradox in special relativity is reviewed and discussed. Two space ships start acceleration at the same time in an inertial frame S , to the same direction along the line joining them, experience the same acceleration for the same time duration, stop acceleration at the same time and reach the same velocity u , which is not too small compared with the light speed. Then, what is the distance between two space ships, after the acceleration, observed from S ? Does it contract as is suggested by Lorentz transformation, or does it stay constant?

The answer is obvious: it stays constant. Interestingly, the distance, observed from a frame of the space ships, does not stay constant but increases. The distance between two space ships is not the same as the length of one space ship.

The present authors discovered an interesting fact that lots of physicists including university professors, who teach relativity, cannot understand this self-evident problem. We solve the problem using Minkowski space-time diagram, and explain possible pitfalls.

1. はじめに

静止している長さ L の物体が速度 u に達したとき、物体の長さは、特殊相対論により、

$$L' = L\sqrt{1-(u/c)^2} \quad (1)$$

で表される。もちろんこれは正しいのだが、実際に物体が縮むか否かは条件次第である。例えば、10光年もの長さを持つ巨大な宇宙船があったとする。宇宙船にはあらゆる部位にロケットエンジンが取り付けられており、1年で光速度の80%に達するだけの能力があるとしよう。もしも、式1に従うならば、宇宙船は1年で6光年の長さになる。しかしながら、どのような縮み方を考えても、宇宙船のどこかが超光速で移動しなければ、この長さは達成することができない。

このような問いかけに対し、宇宙船が巨大過ぎて現実的ではないとの指摘もあるが、これは本質的な問題とはならない。数十メートル規模の宇宙船が現実的であるのならば、このような小さな宇宙船を多数連結し、一斉に加速するようにあらかじめプログラミングしておけばよいだけの話である。

我々はこの問題をもっと単純化し、2台の宇宙船

の間隔がどう変化するかというものにした。詳しい設定は以下の通り：

まず、全く同じ形と性能を持つ2台の宇宙船AとBを用意する。宇宙船は当初 S 系に静止しており、同一線上に向きを同じにして間隔 L で並べられている。このとき観測者は宇宙船の外にあり、ずっと S 系に留まっている。ある瞬間、宇宙船は観測者に対して、同時に加速を開始する。加速中はその速度が時々刻々変化するが、2台の宇宙船の性能が同じであることから、瞬間瞬間の速度は2台とも同じであると観測者は観測する。観測者が見た加速終了もまた同時であり、最終的に観測者に対して到達する速度 u も全く同じである(図1)。



図1: 2台の宇宙船AとBの配置

答えは全くもって明白である。2台の宇宙船は、出発する位置以外、すべて同じ動きをするのであるから、加速前から加速終了まで常に等間隔 L を保ち続ける。この結論はニュートン力学でも特殊相対論で

も変わらない。このことは、ミンコフスキー時空図上に宇宙船の世界線を描けば明らかとなる。図2は横軸にS系における座標 x を表したもので、縦軸は ct を表している。 t はS系で測った時間である。2台の宇宙船AとBは当初共に静止していたのであるから、位置は変化せず、間隔は L のままである。このことを表しているのが $A \rightarrow A'$ と $B \rightarrow B'$ である。その後宇宙船は同時刻 $t=0$ で加速を始めるが、話を単純にするため、加速期間は極短いものとする。図中 B' と B'' は、宇宙船Bの加速前と加速後を表しているのだが、区別できないくらい非常に接近した点だとする。すると宇宙船の世界線は $t=0$ で折れ曲がったグラフとなる。加速終了後の宇宙船はそれぞれ、 $A' \rightarrow A'' \rightarrow A'''$ および $B' \rightarrow B'' \rightarrow B'''$ という軌跡を描くが、その間隔はやはり L のままなのがお分かりだろう。あえて注意するとすれば、等速直線運動を始めた宇宙船の間隔を測るには、ある瞬間のそれぞれの宇宙船の位置を測定して、その間隔を測らなければならないという点である。すなわち、宇宙船の位置の測定は同時に成されねばならない。S系において、 $A'B'$ が水平であると同様に、 $A''B''$ も水平であり、その間隔は L のままである。

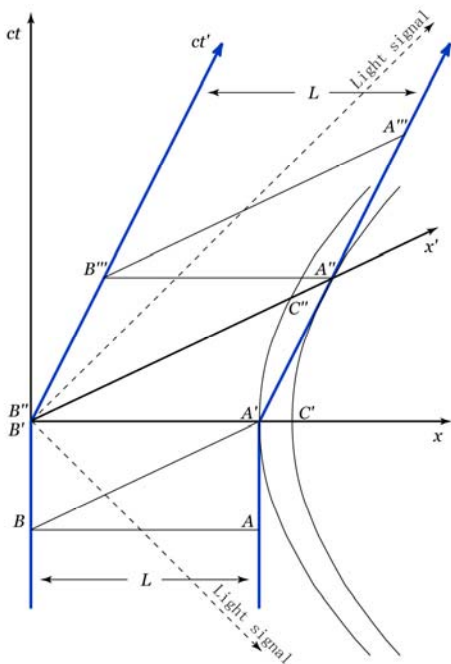


図2: 2台の宇宙船の時空図上での世界線。S系は直交座標(x, ct)で表され、宇宙船は青線で描かれている。なお、加速終了後の宇宙船に対して静止している座標系は斜交座標系(x', ct')で表した。

特殊相対論の教えによれば、長さ L の“物体”は式1に従ってローレンツ収縮する筈であった。詳しくは後述するが、S系から観測した宇宙船自身の長さはこの加速によって最終的には正しくローレンツ収縮をすることになるだろう。しかしながら、その間隔は常に変わらないのである。

2. 宇宙船間隔の伸張

続いて、S系に対して速度 u で右に動いている座標 S' 系で宇宙船の間隔を考えると興味深いことがわかる。 S' 系というのは、加速終了した後の宇宙船を静止と見る座標系であり、図2では(x', ct')で表されている。

S' 系にずっと留まっている観測者の立場でみると、 A' と B' は同時の出来事を表していない。 S' 系で同時と見なされるのは、 x' 軸に平行な線で交わる点であるため、 A' と同時の事象は B'' なのである。同様に、 A'' と同時なのが B' であり、 A''' と同時なのが B''' である。すると S' 系の観測者は、加速終了後の2台の宇宙船の間隔を $A''B''$ あるいは $A'''B'''$ と測定することになるが、これは明らかに L より長い(これを L' とする)。

ただし、図2中での $A''B''$ および $A'''B'''$ の長さ(= L')を直接測り、 AB の長さ(= L)と比べても実際の長さは得られない。何故ならば、 x 軸と x' 軸の目盛は等しくないからである。目盛を較正して長さを比較するには

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2 = (L')^2 \quad (2)$$

という不変量を利用する。この線を図示すると、 A' で直線 $A'A''A'''$ に接し B' から出た光の世界線を漸近線とする双曲線となる。この双曲線と x 軸との交点を C' とすると、 $B''C'$ が L' を表すこととなり、当然ながら、 $B'A' < B''C'$ である。具体的に L と L' との関係を表すと以下の式、

$$L' = L / \sqrt{1-(u/c)^2} \quad (3)$$

が得られる。 S' 系の観測者から見た場合、2台の宇宙船の間隔は加速前より伸張した L' になってしまうことになる。ローレンツ収縮どころか、ローレンツ伸張だ。

なお、 S' 系の観測者は加速前の2台の宇宙船の間隔を L とは認識していないことに注意しておく必要がある。このことを説明するには、 S' 系の座標を直交座標とした図を示せばよい(図3)。図2と図3で使用している記号や直線は、座標変換を行った以外は全く同一である。

S' 系からみると、当初2台の宇宙船は左へ移動しており、エンジンの点火によって静止するように観測される。S系にいる観測者からの視点と比べて明らかに異なっている点は、2台の宇宙船の点火は同時ではないという事実である。当初2台の宇宙船は、 $B \rightarrow B'$ および $A \rightarrow A'$ のように左向きに同じ速度で移動している。そして最初に A' で宇宙船Aがエンジンを点火して静止するが、宇宙船Bは移動し続け、 B' まできてようやく静止することになる。このタイムラグによって宇宙船の間隔は開くのである。S系の観測者はAとB、 A' と B' が同時だと主張するが、 S' 系の観測者からみれば A' と B 、 A'' と B'' が同時なのだ。2台の宇宙船が共に S' 系に対して静止した後の間隔が式3で表される L' であるとしたとき、では共に点火前の状態の間隔(これを L とする)はいかばかりであろうか？

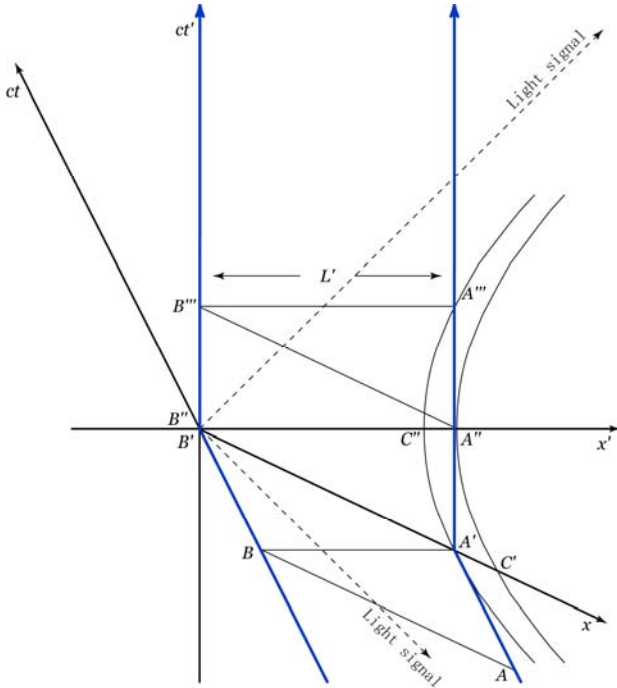


図3: S'系を直交座標として描き直した時空図。図2と比べて変化が無いのは、2本の双曲線と光信号の世界線のみである。

図3中でのA'B''およびA'''B'''の長さ(=L')は物差しを当てて直接測ることができるのと同様に、L'を示すA'B'の長さも直接測ることができる。ただし、Lを表すA'B'は斜交座標上の長さであるため目盛を較正して長さを比較しなければならない。これには、

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2 = L^2 \quad (4)$$

という不変量を利用する。この線を図示すると、A'で直線AA'に接しB'から出た光の世界線を漸近線とする双曲線となる。この双曲線とx'軸との交点をC''とすると、B'C''がLを表すこととなり、当然ながら、B'C'' < B''A''である。さらに図から分かることは、A'B' < B'C''であるということだ。すなわち、L'の長さはLより短いのである。具体的にLとL'との関係を表すと以下の式、

$$L' = L\sqrt{1-(u/c)^2} \quad (5)$$

が得られる。これはローレンツ収縮そのものである。

まとめてみよう。S系で当初間隔Lを保って静止していた2台の宇宙船が、同じ時間、同じ急加速をし、同時に加速をやめて、同じ速度に達するならば、その間隔は最初から最後までLのまま不変である。ところがこの状況をS'系に留まっていた観測者は、Lより短い間隔L'で移動してした2台の宇宙船が、異なった時間で急停止し、そのタイムラグによって、Lより長い間隔L'で静止したとするのである。

3. 宇宙船搭乗者の視点

これまでS系とS'系の観測者について考えてきたが、共にそれぞれの系に居続ける観測者であった。

これに対し、宇宙船の搭乗者は、加速の前後でS系からS'系へと乗り換える観測者であり、前出の2名の観測者とは違う奇妙な体験をすることとなる。便宜上、ここでは宇宙船Bに搭乗している観測者の視点を考えることとする。

もっとも奇妙な経験だと思われるのは、加速の前後で、2台の宇宙船の間隔が瞬間的に開いてしまうということである。言うなれば、宇宙船Aが超光速で瞬間移動してしまうのである。この現象の鍵となるのは、系が変わることで同時刻を表すラインが変わる点にある。加速前の搭乗者はS系の観測者と全く環境にあるため、図2のx軸以下の状況と等しい。ところが加速終了後、今度はS'系の観測者と同じになるため、図3のx'軸以上の状況と等しくなる。実際に切り貼りしてみると分かるが、A'とA''が同じ時刻t=0上にあることとなり、2台の宇宙船の間隔はLからL'へと急激にかわる。この際、宇宙船AのA'→A''の軌跡が抜け落ちているのが分かるであろう。加速直前のB'と同時刻なのは、A'であり、加速直後のB''と同時刻なのは、A''である。設定により、B'→B''の軌跡は短く、空間的にも時間的にも近傍にある。ところが、A'→A''の軌跡は、空間的に離れているのはもちろん、時間的にも離れている。すなわち、宇宙船Bの搭乗者は、極短時間で終了する加速期間の前後で、宇宙船Aが瞬間的に離れるのと同時に、宇宙船Aの時計が急速に動くのを観測するのである。

なお、誤解のないよう付け加えておくと、ここで述べている『観測する』という言葉は、観測者が実際に望遠鏡で宇宙船Aを見たことを意味しているのではない。2台の宇宙船は空間的に離れており、互いに相手を観測した映像は光速が有限であるが故に、今現在の映像ではなく過去に発せられた映像を見ていることになる。このため、例えば「A'とB'が同時刻と観測する」と述べた場合、宇宙船Bの搭乗者は手元の時計と望遠鏡で見た宇宙船A内の時計が一致しているのを見ているのでは無く、A'B'間(=L)を光が通過する時間L/cだけ遅れている宇宙船A内の時計を見て同時刻だと判断しているのである。このようないわゆる、光行差現象を含めた議論も奥が深く興味深いのであるが、本稿では扱わないものとする。

さて、宇宙船Bの搭乗者が奇妙な経験をするのは、端的に言えば、B'→B''にA'→A''が対応していることに由来する。すなわち、宇宙船Bの加速期間での出来事が問題となるのである。ここで重要なのは、加速期間B'→B''は極短期間であると仮定することはできるが、決してゼロであるとする事はできないという点にある。例えば、S系の観測者から見た場合、2台の宇宙船は速度0からuへと移行するのであるが、その間には必ず速度u/3やu/2の瞬間が存在しているのであり、いきなりS系からS'系に移行するわけではない。その間に無数の慣性系を経るのである。よって、時空図の座標軸は、宇宙船Bの加速期間中にx→x'およびct→ct'と連続的に変化することになる。このことを考慮し、図2に手を加えたものが図4である。ただし今回は、宇宙船Aの動きとして、3パターンを考えた。

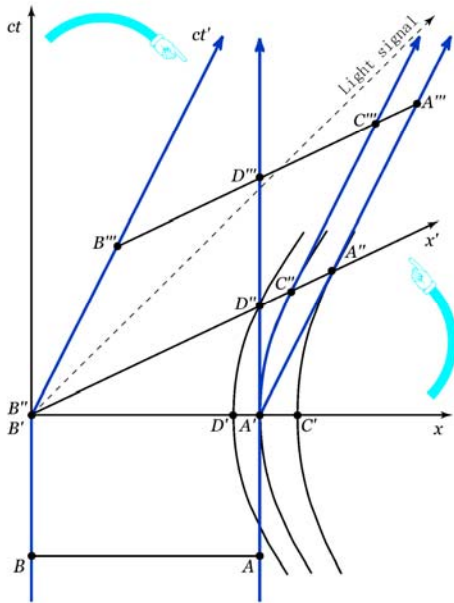


図 4: 加速期間を考慮した 2 台の宇宙船の時空図上での世界線。直交座標であった S 系(x,ct)は、徐々に S'系(x',ct')へと移行していく。

ひとつ目は、これまで述べてきた軌跡で、S 系からみて 2 台の宇宙船の間隔が変化しない設定である。A→A'→A''→A'''という軌跡を描く。加速前に A'B' (=L)の間隔であったものが、加速後には A''B'' (=L')と伸張するというものであった。伸張する理由は、加速中に x 軸が連続的に x'まで移動することによる。軸の移動は 2 台の宇宙船の同時刻を表す線が変動することを意味している。

ふたつ目は宇宙船 B の搭乗者から見て 2 台の宇宙船の間隔が変化しない設定である。A→A'→C''→C'''という軌跡を描く。ここで重要なのは、A'→C''の部分であり、式 4 で示された座標変換に対して不変量となる双曲線上に宇宙船 A の世界線が載っている。S 系の観測者から見れば、B'→B''が一瞬で終わってしまうのに対し、A'→C''は長い期間かけて加速を行うと観測されるだろう。最終的な到達速度は宇宙船 A と B 共に u であるが、宇宙船 A の加速が B に比べて弱く、かつ、宇宙船 B の速度が常に宇宙船 A の速度を卓越しているため、その間隔は縮んでいく。加速終了後の最終的な縮みは速度 u におけるローレンツ収縮 $L\sqrt{1-(u/c)^2}$ のものである。ところが、宇宙船 B の搭乗者から見ると、B'→B''と A'→C''は全く同じ期間であり、加速の強さも同等であると観測されるのである。

ただし、ひとつ注意すべきことは、加速期間や強さが同じと観測されるとしても、それぞれの宇宙船で測られた加速期間は同じではないということである。宇宙船 B の搭乗者から見れば、宇宙船 A に積まれた時計は加速期間中ぐるぐると早回りする。宇宙船 A の加速期間は、あらかじめ長めにプログラムし、それに合わせて加速度が小さくなるよう宇宙船エンジンの出力も弱めにしておかなければならない。このこ

とについてはまた後述する。

みつつ目は、宇宙船 A が全く加速しなかった場合である。A→A'→D''→D'''という軌跡を描く。S 系の観測者から見れば、B'→B''は一瞬で終わってしまうのであるから、加速前後で 2 台の宇宙船の間隔がそれほど大きく変化したようには観測されない。ところが宇宙船 B の搭乗者から見れば、加速前に A'B'の間隔であったものが、加速後には D''B''と瞬間的に収縮するのである。目盛を校正して長さを比較するならば、長さ A'B'に対して長さ D''B''となってしまうのであり、明らかに A'B' > D''B''である。

以上 3 つのパターンについて考え、宇宙船 B の加速前後で宇宙船の間隔がそれぞれ、伸張、変化なし、収縮、と分かれたのであるが、この違いが生じた原因は、2 台の宇宙船の同時刻を表す横軸が急激に変化した(x→x')ことに集約されている。S 系の観測者から見れば B''は B'のすぐ上に位置しており、これに対する同時刻の宇宙船 A の位置は、A'のすぐ上に対応するであろう。そのため、3 つのパターン共に距離的にはほとんど差違はでない。ところが、宇宙船 B の搭乗者の立場では、同時刻を表す線が大きく移動してしまったため、B''に対する同時刻の宇宙船 A の位置は、A''、C''および D''と大きく開いてしまうのである。

さらに、どのパターンでも、宇宙船 A の時計は宇宙船 B の加速期間中ぐるぐると早回りすることになる。同時に宇宙船 B に対する宇宙船 A の移動速度が光速を越えてしまうことも十分考えられる。しかし、このことは特殊相対論の破綻を表しているのではない。もしもそのように感じたのであれば、特殊相対論の本質的な理解がなされていないのである。

4. 一般相対論的な解説

宇宙船 B の搭乗者の奇妙な経験について、一般相対論的な見知から解説を試みると見通しがよくなる。

宇宙船 B の加速中、搭乗者は宇宙船内に重力が発生したように感じるが、事実それは等価原理により、実際の重力場と何ら変わらない。ただし、星が作る重力場との違いとして、重力が作用する中心が存在せず、宇宙船 B に対してどれほど距離が離れていようとも、重力作用に変化がない点が挙げられる。すなわち、地球が発生させる重力は、地球から離れれば離れるほど弱まるし北半球と南半球では向きが異なるが、宇宙船の加速によって生じた重力は距離に依存せずに一定で、全空間で同じ向きとなる。このため、宇宙船 A が宇宙船 B とどれほど離れていようとも、宇宙船 B が加速を始めた(搭乗者は重力場が突如発生したとを感じる)瞬間から、宇宙船 B の搭乗者が感じる重力と同じ強さの重力で引かれ始めることとなる。

宇宙船の加速によって発生する重力場の方程式を具体的に書くと、

$$ds^2 = (1 + \frac{a}{c^2} x)^2 c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (6)$$

と表すことができる。ここで x は 2 台の宇宙船の間

隔, a は重力加速度であり, $a=0$ であるならばミンコフスキー時空と一致する。この式からわかることは, 宇宙船 B の搭乗者がみる宇宙船 A に搭載されている時計の動く早さは, その距離に比例して変化するということである。宇宙船 A と B の固有時をそれぞれ τ_A および τ_B とすれば,

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = 1 + \frac{a}{c^2} x \quad (7)$$

となる。 a が地球上の重力加速度と同じと仮定すれば, 宇宙船の間隔が 1 光年開いていれば約 2 倍, 2 光年開いていれば約 3 倍というように, 宇宙船 A の時計は早く進む。我々は図 4 を使った説明において, 2 台の宇宙船の同時刻を表す横軸が連続的に変化する($x \rightarrow x'$)ことを述べたのであるが, 宇宙船 A が宇宙船 B から離れた点であればあるほど, 加速前後での間隔の変化が大きくなることに, 式 7 は対応している。

ちなみに, 地球上でも低地よりも高地に置かれた時計の方が早く進むことが確認されている。このため, 地上で全く同一の時を刻む時計であっても, 遥か上空で使用するためには何らかの処置が必要となる。例えば, GPS で使用される衛星には正確な時計が搭載されているが, 地上で調整されたその時計は, 僅かばかりゆっくりと時を刻むようにあらかじめ設定されている。これは, 打ち上げられる軌道上での固有時は, 地上の固有時よりも流れが速いため, 地上から時刻情報の載った電波を受け取る時に, ピタリと合うように工夫されたものだ。逆に, 地上でピタリと合わせた時計を GPS 衛星に積んでしまったなら, 僅かばかり早く進む時計として地上では認識されてしまうのである。ただし, 地球の重力場での固有時の違いは式 7 ではなく,

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \frac{\sqrt{1-r_g/r_A}}{\sqrt{1-r_g/r_B}} \quad (8)$$

である。ここで, r_g はシュバルツシルト半径, r_A と r_B は対象となる時計の地球中心からの距離である。ここで, 式 7 の宇宙船の間隔 x は大きくなればなるほど固有時比が開くものに対して, 式 8 の固有時比はある一定値に収束するという点が異なる。このため, 地球から如何に離れた時計であっても, 見た目で見分ける程, 時刻の進みの違いは検出されないのであるが, 宇宙船の加速による重力場はその距離によって, 大きく変わり得るのである。

このことを踏まえた上で, 今一度宇宙船 A の 3 パターンの動きを考えてみる。共通して言えるのは, 宇宙船 A は宇宙船 B の遥か上空にあり, そこでの固有時は一目で分かるほど早いということである。

まずパターン 1 では, 宇宙船 A と B が全く同じ性能であったということだ。このため, 宇宙船 A は一気に加速を終え, 加速を始めたばかりの宇宙船 B からどんとんと離れていく。当初の設定により, 宇宙船 B の加速期間は一瞬であると仮定したのであるが, 宇宙船 B から見た宇宙船 A の加速はさらに短時間で終了してしまうのである。

パターン 2 は, 宇宙船 A の固有時の進みをあらか

じめ考慮して加速を弱めにし, かつ, 加速期間を伸ばした状態だとみることが出来る。前述の GPS に積まれた時計の調整と同じ方法である。ここで, 宇宙船 A と B の加速度を a_A および a_B とすれば,

$$a_A = \frac{a_B}{1 + \frac{a_B}{c^2} L} \quad (9)$$

という関係を保てるならば, 2 台の宇宙船の間隔は, 宇宙船 B の搭乗者からみて常に L のまま保たれることとなる。

パターン 3 は, 宇宙船 A の自由落下である。我々が目にする自由落下と違うのは, その場の固有時間が異様に早いため, 時に落下速度が光速を越えるように見えるという点である。ただし, 宇宙船 A の落下速度を宇宙船 B 近傍にある時計で測ると光速を越えて観測されるということであり, 宇宙船 A の落下速度を宇宙船 A 近傍にある時計で測ったならば, 光速を越えることは無いということをつけ加えておく。

5. ローレンツ収縮は何故おこるのか?

これまでの解説で, 2 台の宇宙船の振る舞いはおおよそ分かったと思われる。我々はここで原点に立ち返り, 同じ性能の 2 台の宇宙船が加速しても, その間隔はなぜローレンツ収縮をしないのかを考察する。

この疑問に答えるには逆転の発想で, どうすればローレンツ収縮させることができるかを述べると分かりやすい。具体的には, 宇宙船 A と B の間を伸び縮みできるバネのようなもので連結してやればよい(図 5)。

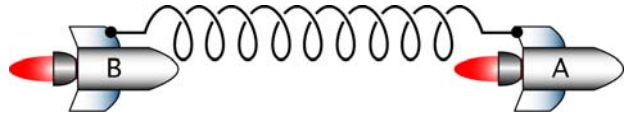


図 5: バネで連結した宇宙船。途中伸び縮みしても, 最終的には適切な長さで落ち着く。

既に述べたように, 宇宙船 A と B の性能が同じであるならば, 宇宙船 B の搭乗者からみて宇宙船の間隔は開いていく。ところが, 2 台がバネで連結されていたならば, 一度開いた間隔もバネの力によって修復され, 最終的には元の間隔に戻るはずである。この動きを S 系の観測者がみた場合, 連結された宇宙船はちゃんとローレンツ収縮することになる。収縮という言葉によって, ともすると圧縮される力が働くようなイメージを抱くかも知れないが, 実際は両側から引っ張られる力が働くために縮むのである。

なお, どのような場合でもちゃんとローレンツ収縮できると言うわけではなく, やはり限界がある。冒頭で述べたように, 宇宙船が 1 年で 6 光年の長さに縮むことはあり得ない。もしも, 2 台の宇宙船の間隔が c^2/a_A 以上あったとしよう。 a_A は宇宙船 A の加速度である。宇宙船 A の搭乗者からみると宇宙船 B がどのように素晴らしいエンジンを搭載していたとしても, その間隔を縮めることは不可能なのである。事実, 宇宙船 B から発した光さえも宇宙船 A に

は届かない。距離 c^2/a_A 下方というのは、時間が止まってしまう場所であり、事象の地平線であるからだ。このとき、宇宙船 A の搭乗者からみたロケット B は事象の地平線の向こうに垂らした釣り針のようなものであり、宇宙船 A が加速し続ける以上、決してたぐり寄せることができないのである。

6. 身近な応用

最後に、2台の宇宙船のパラドックスは我々の身近な現象についても応用が可能であるということを目指しておく。そこでは、広大な宇宙空間も技術的に建造が困難な宇宙船も登場しない。必要なのは僅かばかりの電池と導線、そして帯電しているボールだけである。

まず直線に伸ばした導線を用意し、その上に帯電したボールを近づけて固定する。次に導線の両端に電池を繋ぎ電流を流す。この段階ではまだ何も生じない。続けてボールを導線と平行に動かすと力を受けるのが分かる。我々はこの力をローレンツ力で説明する。すなわち、導線に電流が流れると右ネジの法則によりボール周辺に磁場が生じる。帯電したボールが移動し、磁力線を横切ることによって力が発生するのである。

では、観測者がボールと共に移動したならばどうだろうか？ ボールと共に動く観測者はロケット B の搭乗者と同様に、ある瞬間、S系からS'系へと乗り換えるが、ボールは常に目の前に静止していることになる。この観測者の立場でもボールは力を受ける筈だが、では何故力を受けないのであろうか？ 少なくとも、ボールが静止していると観測する以上、磁場から力を受けない。

結論から述べると、導線に対して移動する観測者は、S'系に移ってから導線が帯電していると感じ、そのため、ボールに力を及ぼすと結論づけるのである。その説明方法は正に2台の宇宙船のパラドックスと同じである。

まず、導線に対して常時止まっているS系の観測者の立場で考えると、実験の期間を通して導線は全く帯電していないことが観測される。電池を接続した瞬間の過渡的状态では何らかの不均一が生じ、帯電する可能性があるが、この一瞬を除き帯電することはない。このことをミクロ的に見ると、導線内の陽イオンの電荷密度と自由電子の電荷密度が等しいことを意味する。電池の接続前は、陽イオンも自由電子も静止しているが、接続後は自由電子は移動し

ている。自由電子の速度は個々に異なっているが、電流量に比例した平均移動速度は一定である。

接続後の状態を時空図で模式的に描いたのが図6である。陽イオンと自由電子共に等間隔であるが、自由電子は移動しているため、その世界線が傾いている。ボールと共に動く観測者はS系(x,ct)からS'系(x',ct')へと移るのであるが、話を単純にするため、自由電子の移動速度と同じであるとする。すなわち、この観測者は、移動前は陽イオンと共に静止しているが、移動後は自由電子と共に静止している。

図6: 導線中の陽イオンと自由電子の時空図。S系では同じ密度だが、S'系では異なる。

S系でみた陽イオンおよび自由電子の間隔をL, S'系に移った後の自由電子の間隔をL' (=B₀B₁=B₁B₂=B₂B₃=...)、陽イオンの間隔をL'' (=A₀A₁=A₁A₂=A₂A₃=...)とすれば、式3と式5の結論と同じく、 $L' = L / \sqrt{1-(u/c)^2}$ および $L'' = L\sqrt{1-(u/c)^2}$ が得られる。この密度差により、S'系では導線は正に帯電するのである。

また、図4での説明でも論じたが、A₁B₁ < A₂B₂ < A₃B₃ < ... であることも容易に分かる。この間隔は観測者からの距離に比例して大きくなるが、式7で述べたように、距離に比例して時計の進みが早くなるからだとするのが分かりやすいであろう。

驚くべきことは、前提となる距離や速度のスケールが宇宙船での話と桁外れに違うのにも関わらず、全く同じ論理がここで成立するという点である。移動する自由電子の平均移動速度は秒速で1mm程度であるし、導線の長さについても数十cm程度あれば十分であろう。光速度の80%とか数光年の距離では無いにも関わらず、陽イオンおよび自由電子の密度差を説明するにはローレンツ収縮を持ち出す必要がある。もちろん、宇宙船での話と異なり、LとL'およびL''の違いは極僅かなものである。しかし、導線内に含まれる陽イオンと自由電子の数が非常に多いため、僅かな密度差が観測にかかるのである。

以上述べたように、2台の宇宙船のパラドックスはマイクロからマクロまで応用範囲が広い。また、相対論の大家であったとしても、意外とよく理解していない場合があり、なかなか興味深いのである。

